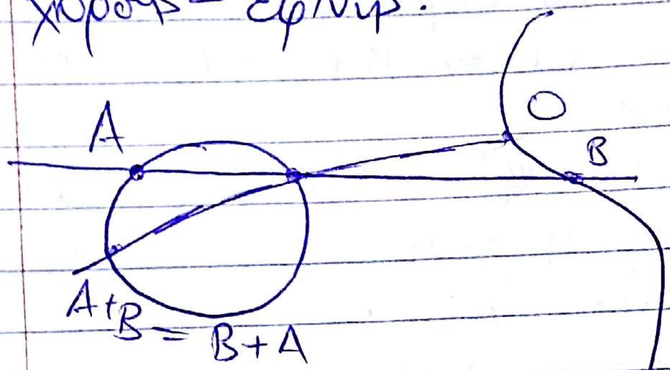
16/05/17 : Ελλειπτικές Καμπύλες Ι

Τριτοβάθμια καμπύλη χωρίς ιδιόμορφα σημεία εφοδιασμένη με την δομή ομάδας που δίνεται από τον κανόνα χορδής – εφ/νης.

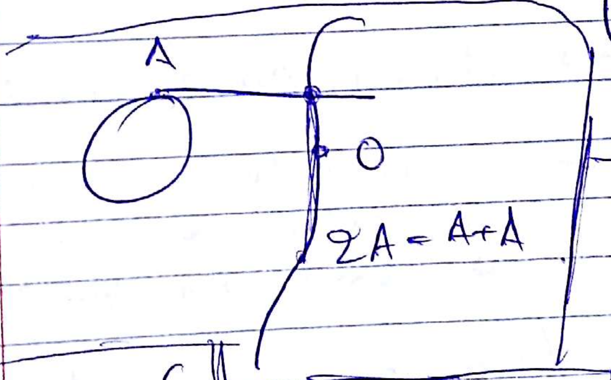
$V(F) \subset P^2_{\mathbb{C}}$

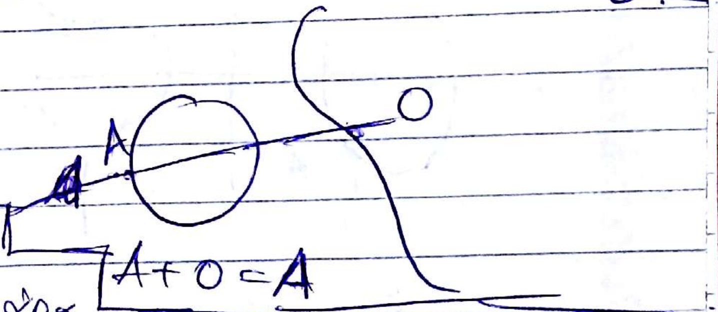


Τα στοιχ. της ομάδας είναι τα σημεία της καμπύλης.

→ 3-βάθμια: 9 σημ. καμπ.

Διαλέγουμε ένα από αυτά και το ονομάζουμε O





$A+O=A$

εφ/νη σε σ.κ. άρα τέμνει την καμπύλη στο ίδιο σημείο

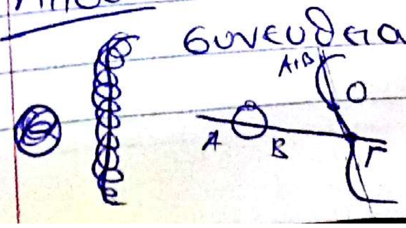
$A+X=O$

και

άρα $X=-A$

Θεώρημα: Τα σημεία A, B, Γ της καμπύλης $V(F)$ (3-βάθμια χωρίς ιδιόμορφα σημεία) είναι συνευθειακά αν και μόνο αν $A+B+\Gamma=O$.

Απόδ.: $(A+B)+\Gamma = O$ από το σχήμα αφού A, B, Γ συνευθειακά

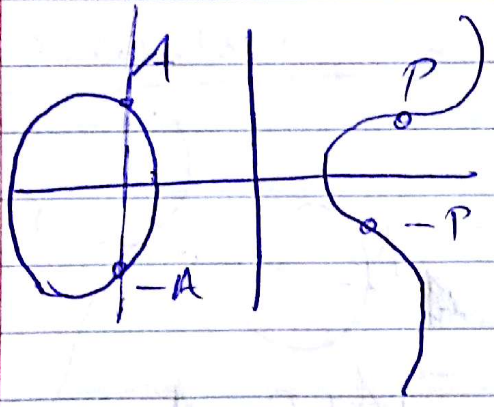


Αντίστροφα: $A+B+X=O \Rightarrow X=-A-B \rightarrow X=\Gamma$.

Γενικά αν πάρω την τομή μιας 3-βάθμιας και μιας καμπύλης βαθμού m, έχω $3m$ σημεία και τότε τα $P_1, \dots, P_{3m}$ σημεία της $V(F)$ ανήκουν στην καμπύλη βαθμού $m \Leftrightarrow P_1 + \dots + P_{3m} = 0$.

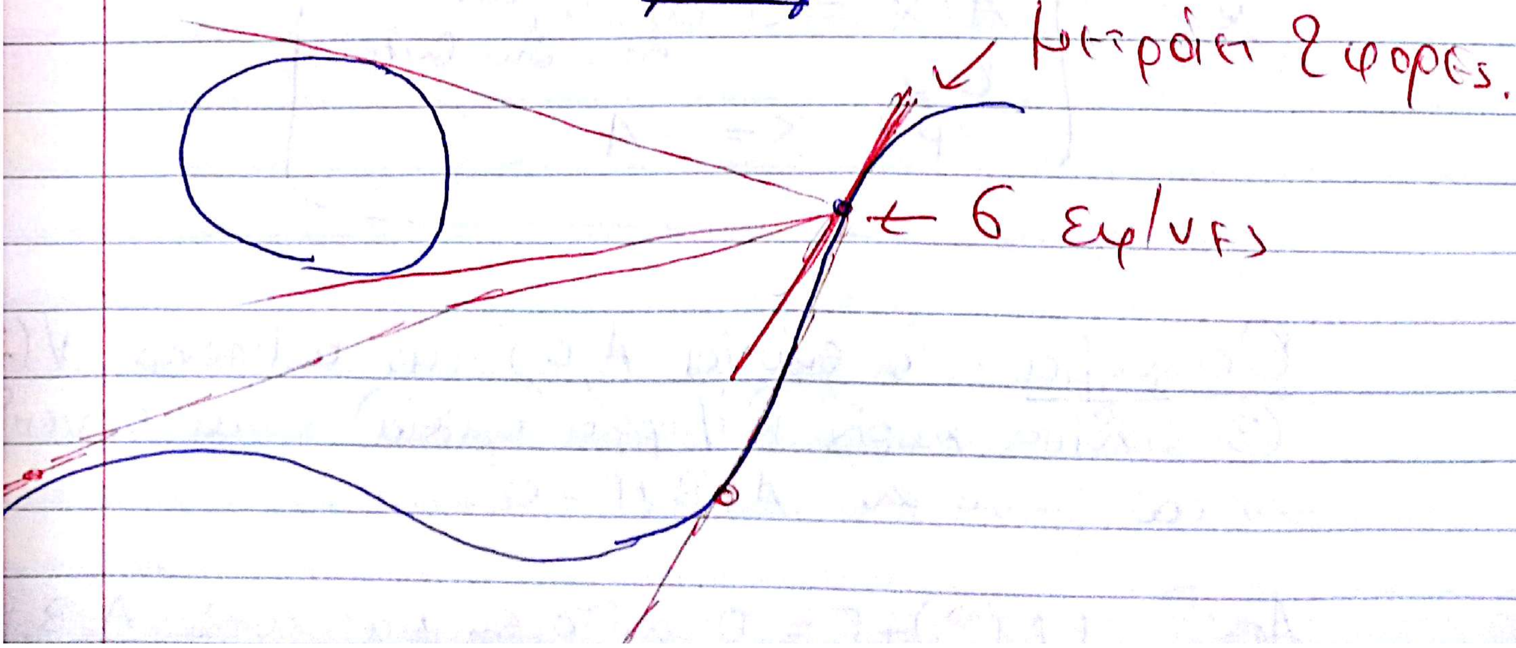
Αν πάρω $V(F) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, $F(x,y,z) \in \mathbb{R}[x,y,z]$ και έχω έστω 1 πραγμ. σημείο καμπής τότε ορίζεται η ομάδα που όρισα και παραπάνω στο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. (ακόμη γίνεται και στους $\mathbb{Q}[x,y,z]$.)

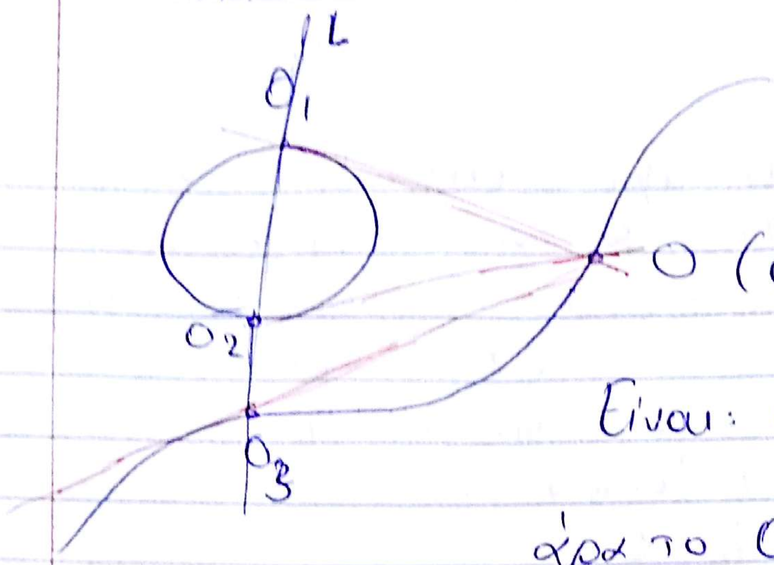
$y^2 = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ← Μορφή Weierstrass



← αποδεικνύεται ότι έχει σημείο καμπής στο ∞ (το $(0,1,0)$) και έχω δομή ομάδας.

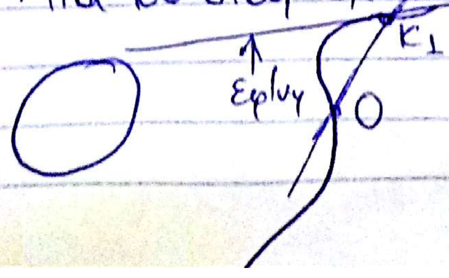
(Για να βρω το $-A$ φέρνω $// y'y$)





Είναι: $O_1+O_1+O=O \Rightarrow$
$\Rightarrow 2O_1=O$, και $O_1\neq O$
άρα το O_1 έχει τάξη 2
και όμοια τάξη $O_2=2$ και τάξη $O_3=2$
και $\nexists$ άλλο σημείο τάξης 2 διότι αν υπήρχε
θα έπρεπε να είναι στην ευθεία των $O_1O_2O_3$
Έστω L: η ευθεία των O_1O_2 και έστω X το σημείο
τομής με την καμπύλη. Τότε $O_1+O_2+X=O \Rightarrow$
$\Rightarrow \underbrace{2O_1}_{O}+\underbrace{2O_2}_{O}+2X=O \Rightarrow 2X=O \rightarrow$ το X έχει
τάξη 2 και άρα η εφαπτ. στο
X θα πρέπει να περνάει από το O.
Όμως ξέρω ότι για τα μόνα σημεία από τα οποία
η εφαπτ. περνάει από το O. Άρα $X\in\{O,O_1,O_2,O_3\}$
(i) Αν $X\equiv O \Rightarrow O_1+O_2+O=O \Rightarrow O_1=-O_2=O_1$ (αφού έχει τάξη 2)
Άρα Άτοπο $\Rightarrow X\not\equiv O$
(ii) $X\equiv O_1 \Rightarrow O_1+O_2+O_1=O \rightarrow O_2=O$ Άτοπο
(iii) $X\equiv O_2 \Rightarrow$ όμοια $\Rightarrow O_1=O$ Άτοπο
(iv) $X\equiv O_3$
Άρα τα O_1, O_2, O_3 βρίσκονται πάντα στην
ίδια ευθεία.
$\underbrace{\{O,O_1,O_2,O_3\}}$. Ξέρω $O_1+O_2+O_3=O \Rightarrow O_1+O_2=O_3=$
$=-O_3$
άρα υποομάδα ισόμορφη με την ομάδα του Klein.

Μια κυβική έχει 9 σημ. καμπής $\{O,K_1,K_2,\dots,K_8\}$



η εφαπτ. τέμνει 3 φορές στο K
και άρα $K+K+K=O \Rightarrow$
$\Rightarrow 3K=O$
Αν $K\not\equiv O \Rightarrow K$ έχει τάξη 3.

Άρα το O έχει τάξη 1 και όλα τα άλλα σημεία καμπής $K_1, \dots, K_8$ έχουν τάξη 3.
Τώρα έστω K_1, K_2 σημεία καμπής, και έστω L η ευθεία που διέρχεται από τα K_1, K_2 και X το τρίτο σημείο τομής της L με την καμπύλη.

K_1 σημ. καμπής $\Rightarrow 3K_1 = 0$

K_2 σ.κ. $\Rightarrow 3K_2 = 0$

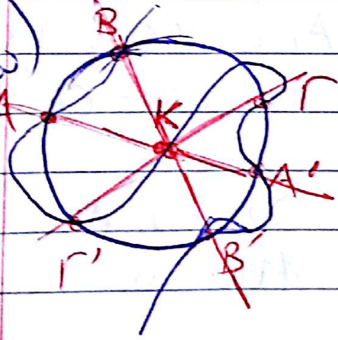
X, K_1, K_2 συνευθ. $\Rightarrow X + K_1 + K_2 = 0 \Rightarrow 3X + 3K_1 + 3K_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{3X = 0} \Rightarrow X$ σημ. καμπής.

Τα 9 σημεία $\{O, K_1, \dots, K_8\}$ σχηματίζουν υποομάδα της ελλειπτικής καμπύλης, αφού $3K_1 = 0 = 3K_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3K_1 + 3K_2 = 0 \Rightarrow 3(K_1 + K_2) = 0 \Rightarrow K_1 + K_2$ είναι σημ. καμπής

Είναι: $\{O, K_1, \dots, K_8\} \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

Παλιό θέμα εξετάσεων



Έστω $V(F)$ κυβική καμπύλη (χωρίς ιδιόμορφα σημεία (λεία)) που διέρχεται από τα $A, B, \Gamma, A', B', \Gamma'$ και K.

Τότε το K είναι σημείο καμπής

Κοιτάζω την $V(F) \subset P^2_{\mathbb{C}}$ για να χρησιμοποιήσω θεωρία ομάδων.

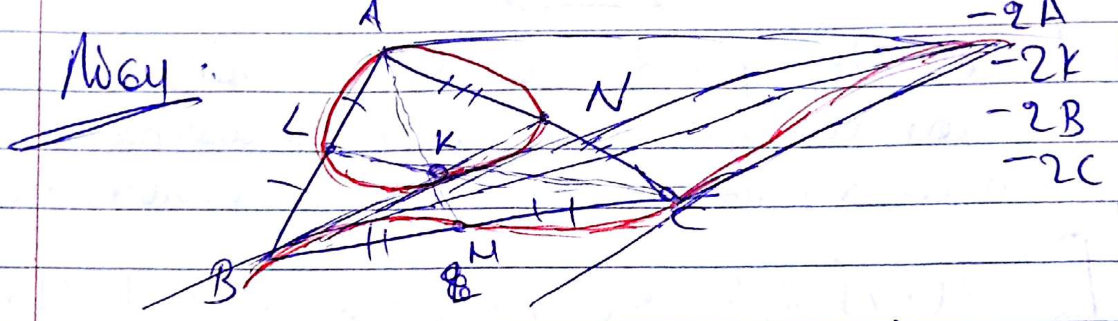
Ξέρω:
- $A + B + \Gamma + A' + B' + \Gamma' = 0$ (τομή κύκλου και κυβικής)
- $A + K + A' = 0$
- $B + K + B' = 0$
- $\Gamma + K + \Gamma' = 0$

(τομή ευθειών και της κυβικής).

$A + B + \Gamma + 3K + A' + B' + \Gamma' = 0 \Rightarrow 3K = 0$

(Παλιό Θέμα Εξετάσεων): Έστω λεία κυβική $V(F)$ διέρχεται απ' τις 3 κορυφές ενός τριγώνου A,B,C, απ' τα τρία μέσα L,M,N των πλευρών AB, AB, CA αντίστοιχα και απ' το κέντρο βάρους (τομή των διαμέσων) K του τριγώνου. Νδο οι εφ/νες στα σημεία A,B,C,K διέρχονται απ' το ίδιο σημείο P της καμπύλης.

Λύση:



Θα χρησιμοποιηθεί η ομάδα της $V(F)$.

Είναι: $A+K+M=0$

$$\begin{cases} A+L+B=0 \\ A+N+C=0 \end{cases}$$

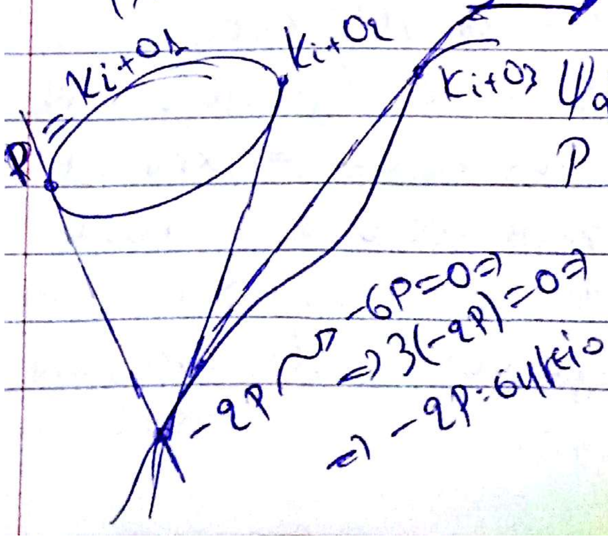
$\to$ $B+K+N=0$

$B+N+C=0$

$\to$ $C+K+L=0$.

$$\left.\begin{aligned} 2A+L+B+N+C&=0 \\ 2K+B+C+N+L&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{2A=2K}$$

άρα οι εφ/νες στην μία κορυφή και οι εφ/νες στο κέντρο βάρους τέμνονται στο ίδιο σημείο και όμοια $-2B=-2K$ και $-2C=-2K$ άρα οι εφ/νες στα A,B,C και K διέρχονται όλες απ' το ίδιο σημείο $P=-2K$.



$-2P \rightsquigarrow -6P=0 \Rightarrow 3(-2P)=0 \Rightarrow -2P$: σημείο καμπής

Ψάχνω $6P=0 \Rightarrow$ τάξη του P είναι $1,2,3,6$.

$\downarrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$

O | O_1, O_2, O_3 | $k_1, k_2, \vdots, k_8$ | ?

αυτά που η εφ/νη τους περνάει απ' το O

σημ. καμπής.

Για κάθε σ.κ. έχω 3 σημεία → $3 \cdot 8 = 24$ σημεία

↓

τα $K_i + O_1$ / $K_i + O_2$ / $K_i + O_3$

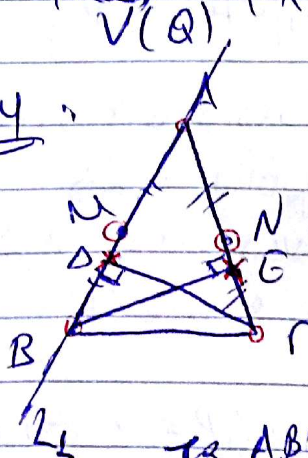
και αυτά είναι υποομάδα της $V(F)$: ελλειπτικής καμπύλης $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$

Ασθενές Θεώρημα Bezout: Αν δύο καμπύλες βαθμού n και m αντίστοιχα έχουν περισσότερα από $m \cdot n$ κοινά σημεία τότε έχουν κοινή συνιστώσα.

[$f \in K[x,y]$ ή $F \in K[x,y,z]$ τότε $K[x,y]$, $K[x,y,z]$ είναι ΠΜΑ και άρα $f = f_1 f_2 \dots f_q$, $F = F_1 \dots F_q$ γινόμενα αναγώγων και τότε $V(f) = \cup V(f_i)$, $V(F) = \cup V(F_i)$ και $V(F_i)$ οι συνιστώσες της $V(F)$]

(Παλαιό Θέμα): Έστω Q: κωνική (2-βάθμια) που διέρχεται από τις τρεις κορυφές ισοσκελούς τριγώνου και από τα μέσα των δύο ίσων πλευρών. Δείξτε ότι η $V(Q)$ διέρχεται από τα πόδια των υψών.

Λύση:



$V(Q)$: Θεωρώ την ευθεία L_1 που διέρχεται απ' τα A, M, B. Οπότε $V(Q) \cap V(L) \neq \emptyset$ και $V(Q)$, $V(L)$ έχουν τα A, B, M → $3 > 2 = 2 \cdot 1$ (γινόμενο βαθμών) κοινά σημεία ⇒ από Θεώρημα Bezout έχουν κοινή συνιστώσα.

Όμως το πολυώνυμο L_1 που ορίζει την ευθεία είναι 1ου βαθμού άρα είναι ανάγωγο, δηλαδή $V(L)$ έχει μόνο μία συνιστώσα.

Άρα η κοινή συνιστώσα είναι η $V(L_1)$ δηλ $Q = L_1 \cdot L_2$

$V(Q) = V(L_1) \cup V(L_2)$

$\left.\begin{array}{l} N, \Gamma \in V(Q) \\ N, \Gamma \notin V(L_1) \end{array}\right\} \Rightarrow N, \Gamma \in V(L_2) \Rightarrow$ η ~~ευθεία~~ L_2 είναι η ευθεία που διέρχεται από τα N, Γ.

$\underbrace{\Delta \in V(L_1), \ E \in V(L_2)}$

$\Rightarrow \Delta, E \in V(Q)$.

Ισχυρό Θεώρημα Bezout (~1850)

Αν δύο καμπύλες $V(F), V(G)$ βαθμών m, n αντίστοιχα του προβολικού μιγαδικού επιπέδου δεν έχουν κοινή συνιστώσα, τότε

$\sum I_p(F,G) = m \cdot n$, όπου I: συντελεστής τομής και $P \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.